二重三角函数と実二次体の合同類不変量 (多重ゼータ値の諸相)

小野寺, 一浩

数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 149-158

二重三角函数と実二次体の合同類不変量

東京工業大学 大学院理工学研究科　小野寺一浩 (Kazuhiro Onodera)
Graduate School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology

はじめに

1978 年に新谷卓郎は, 実二次体の合同イデアル類に関するある不変量が Barnes の二重ガンマ函数の商 (現在では二重三角函数と呼ばれ, 例えば $S_2(z,(\omega_1,\omega_2))$ と表される) を用いて表示できることを発見した. その後, 荒川恒男は Eisenstein 級数の類似物に関する変換公式を用いて, また B. Tangedal と山本修司はマイナス連分数の理論によって, その不変量に対して二重三角函数を用いた異なる表示を与えた. 例えば, ある合同類の不変量 X は

$$X = S_2\left(\frac{\alpha}{4},(1,\alpha)\right) S_2\left(\frac{3+3\alpha}{4},(1,\alpha)\right) S_2\left(\frac{1}{4}+\alpha,(1,\alpha)\right),$$

$$X = S_2\left(\frac{\beta}{4},(1,\beta)\right) S_2\left(\frac{7+7\beta}{8},(1,\beta)\right) S_2\left(\frac{3+2\beta}{4},(1,\beta)\right) S_2\left(\frac{5+\beta}{8},(1,\beta)\right)$$
$$\times S_2\left(\frac{2+3\beta}{4},(1,\beta)\right) S_2\left(\frac{3+3\beta}{8},(1,\beta)\right) S_2\left(\frac{1}{4}+\beta,(1,\beta)\right) S_2\left(\frac{1+5\beta}{8},(1,\beta)\right)$$

($\alpha=(3+\sqrt{5})/2$, $\beta=\alpha^3$) という表示を持つ. 不変量 X は合同類のゼータ函数を用いて定義されるが, 上の表示はいずれもそれを直接計算することで導出されている. 従って, これらの右辺を比較することで二重三角函数の非自明な関係式が得られるが, その式を X のような代数的対象を経由せずに直接示すことは今まで出来ていなかった. 本稿の目的は, それを可能とする二重三角函数の一つの基本公式を報告することである.

本文では, まず第一節で二重三角函数の定義と基本性質を復習し, その後に主定理を述べる. 第二節では, 合同類のゼータ函数を用いて不変量を導入した後に, 既知の表示法を一つ一つ紹介していき, またそれと平行して, そこから生じる二重三角函数の関係式を主定理の応用として証明していく. また最後に, ある一つの不変量に対して新しくかつ簡明な表示を得ることが出来たので, それを紹介する.

1　二重三角函数

$\omega_1,\omega_2>0$ とし, $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$ とおく. まず二重 Hurwitz ゼータ函数を

$$\zeta_2(s,z,\boldsymbol{\omega}) := \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} (n_1\omega_1+n_2\omega_2+z)^{-s} \quad (z>0)$$

で定義する. 右辺の級数は $\mathrm{Re}(s) > 2$ で絶対収束するが, $\zeta_2(s,z,\boldsymbol{\omega})$ は $s=1,2$ における可能な一位の極を除いて, 全平面で正則な函数に解析接続される. そこで二重ガンマ函数と二重三角函数をそれぞれ

$$\Gamma_2(z,\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_2(s,z,\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right) \quad (z>0),$$
$$S_2(z,\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_2(z,\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_2(\omega_1+\omega_2-z,\boldsymbol{\omega}) \quad (0<z<\omega_1+\omega_2)$$

として定義する. この二重三角函数は, 1977 年に新谷により実二次体における Kronecker の極限公式に関する研究の際に導入された [9]. 但し, その論文では $S_2(z,\boldsymbol{\omega})$ という表記や二重三角函数という名称は用いられていない. これらは 1990 年頃の黒川信重の研究 [3, 4, 5] 以来使用されている.

注意 1.1. 二重ガンマ函数と二重三角函数という名称は, 一重の場合における対応物がガンマ函数とサイン函数であることに由来する.

1.1 基本性質

二重三角函数の性質としては次が基本的である.

命題 1.1. (i) $S_2(z,(\omega_1,\omega_2)) = S_2(z,(\omega_2,\omega_1))$.

(ii) $S_2(\omega_1+\omega_2-z,(\omega_1,\omega_2)) = S_2(z,(\omega_1,\omega_2))^{-1}$.

(iii) (斉次性) 任意の $c>0$ に対して $S_2(cz,(c\omega_1,c\omega_2)) = S_2(z,(\omega_1,\omega_2))$.

(iv) (擬周期性) $S_2(z+\omega_1,(\omega_1,\omega_2)) = S_2(z,(\omega_1,\omega_2))S_1(z,\omega_2)^{-1}$. 但し $S_1(z,\omega) = 2\sin(\pi z/\omega)$.

(v) 任意の正整数 N_1, N_2 に対して

$$S_2\left(z,\left(\frac{\omega_1}{N_1},\frac{\omega_2}{N_2}\right)\right) = \prod_{n_1=0}^{N_1-1}\prod_{n_2=0}^{N_2-1} S_2\left(z+\frac{n_1}{N_1}\omega_1+\frac{n_2}{N_2}\omega_2,(\omega_1,\omega_2)\right).$$

(i) と (ii) は定義から明らかである. 残りの性質の証明は省略するが, 難しくはない. 基本的には, 対応する二重 Hurwitz ゼータ函数の性質を示し, それを $S_2(z,\boldsymbol{\omega})$ の定義式に適用すれば良い (cf. [6], [7]).

1.2 主定理

記述の簡単のため, $x,y\in\mathbb{R}$, $\omega>0$ に対して $S_j(x,y;\omega) = S_2(\{x\}_j\omega+\{y\}_{1-j},(\omega,1))$ $(j=0,1)$ とおく. 但し, $x\notin\mathbb{Z}$ のとき $\{x\}_j = x-[x]$ とし, $x\in\mathbb{Z}$ のとき $\{x\}_j = j$ とする. 更に $\tau,x,y\in\mathbb{R}$ と「$a,c\in\mathbb{Z}$, $c\neq 0$, $j_V(\tau) := (c\tau+d)/\det V > 0$」を満たす $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in GL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$T_j(V;\tau,(x,y)) = \prod_{k \bmod c} S_j\left(\frac{ak+ax+cy}{|c|},-\frac{k+x}{|c|};j_V(\tau)\right) \quad (j=0,1)$$

とおく.

定理 1. $V=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{Z})$, $W=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$ が $cg(ce+dg)\neq 0$, $j_{VW}(\tau)>0$, $j_W(\tau)>0$ を満たすとする. このとき

$$T_j(VW;\tau,(x,y))=T_j(V;W\tau,(x,y))T_j(W;\tau,(x,y)V).$$

但し, $W\tau=(e\tau+f)/(g\tau+h)$, $(x,y)V=(ax+cy,bx+dy)$ とする.

この結果は一般には新しいが, 幾つかの特殊な場合においては既知である. 例えば, $0<\tau<1$, $V=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は, 山本 [13] により証明されている. また, 二重ガンマ函数に関してではあるが, 江上繁樹 [2] によって $V=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の場合に対応する式が知られている.

定理 1 の証明は省略するが, 江上によって導入された cone に付随する二重ゼータ函数の性質を用いる.

注意 1.2. T 函数は Dedekind-Rademacher 和の類似とみなせ, 定理 1 はある種の相互法則と思える. このことに関する解説は, 第 5 回福岡数論研究集会報告集に掲載される予定である.

2 実二次体の合同類不変量

実二次体 F の整イデアル $\mathfrak{f}$ を法とする狭義合同イデアル類群を $H_F(\mathfrak{f})$ とおく. つまり, $I_F(\mathfrak{f})$ を $\mathfrak{f}$ と素な F の分数イデアルのなす群とし, $P^+(\mathfrak{f})=\{(\theta)\mid \theta\in F^\times \text{は総正かつ}\theta\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\}$ とするとき, $H_F(\mathfrak{f})=I_F(\mathfrak{f})/P^+(\mathfrak{f})$ である. また ν を F の総正な整数で $\nu+1\in\mathfrak{f}$ なるものとし, (ν) で代表される $H_F(\mathfrak{f})$ の類を同一の記号 ν で表す.

まず合同類 $\mathfrak{C}\in H_F(\mathfrak{f})$ のゼータ函数を

$$\zeta_F(s,\mathfrak{C})=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}\\ \mathfrak{a}:\text{整イデアル}}} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

と定義する. 但し, $N(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ のノルムである. 右辺の級数は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束するが, $\zeta(s,\mathfrak{C})$ は $s=1$ における一位の極を除いて, 全平面で正則な函数に解析接続される. そこで, 類 $\mathfrak{C}$ の不変量として

$$X(\mathfrak{C})=\exp(-\zeta_F'(0,\mathfrak{C})+\zeta_F'(0,\nu\mathfrak{C}))$$

を導入する. これは 1978 年に新谷 [11] によって初めて研究された. この不変量の導入の背景については新谷自身の詳しい解説 [10] があるのでそちらを参照されたい.

二重三角函数を用いた $X(\mathfrak{C})$ の表示は, 現在までに新谷 [11], 荒川 [1], Tangedal と山本 [12, 13] による三通りの方法が知られている. 本稿では荒川の表示を基礎とするので, まずそれを説明し, その後, 新谷の表示, Tangedal と山本の表示を順に紹介する. またそれと平行して, そこから生じる二重三角函数の関係式を主定理の観点から説明する. また最後に, ある特殊な例における新しい表示を一つ報告する.

2.1 荒川の表示

ここではまず Eisenstein 級数の類似物を導入し, その性質を利用して, 二つの合同類不変量を二重三角函数で構成する. その後に, それらで $X(\mathfrak{C})$ が記述できることを説明する.

まず不変量を構成するための準備をする. $\alpha \in F \setminus \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Q}$ とする. $\mathrm{Re}(s) < 0$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\eta(\alpha, s, p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \frac{e^{2\pi i n(p\alpha+q)}}{1 - e^{2\pi i n\alpha}},$$
$$H_j(\alpha, s, (p,q)) = \eta(\alpha, s, \{-p\}_{1-j}, -q) + e^{\pi i s}\eta(\alpha, s, \{p\}_j, q)$$

とおく ($j = 0, 1$). 上の級数の収束性については [1, Lemma1] を参照せよ. H 函数は, Lewittes [8] によって一般化された Eisenstein 級数を類似したものであり, 次の変換公式を満たす.

命題 2.1. $\mathrm{Re}(s) < 0$ とする. $c > 0$, $j_V(\alpha) > 0$ なる $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$j_V(\alpha)^{-s} H_j(V\alpha, s, (p,q)) = H_j(\alpha, s, (p,q)V) + \gamma(s) Z_j(V; \alpha, s, (p,q)).$$

ここで, $V\alpha = (a\alpha + b)/(c\alpha + d)$, $(p,q)V = (ap + cq, bp + dq)$, $\gamma(s) = (2\pi)^{1-s} e^{\pi i(s-1)/2}\Gamma(1-s)^{-1}$,

$$Z_j(V; \alpha, s, (p,q)) = \sum_{k \bmod c} \zeta_j \left(s; q + \frac{a(k+p)}{c}, -\frac{k+p}{c}; j_V(\alpha) \right)$$

である. 但し $\zeta_j(s; x, y; \omega) = \zeta_2(s, \{x\}_j \omega + \{y\}_{1-j}, (\omega, 1))$ ($s \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$) とする.

特に, 命題 2.1 の仮定を満たす $V \in SL_2(\mathbb{Z})$ で $V\alpha = \alpha$, $(p,q)V \equiv (p,q) \bmod \mathbb{Z}^2$ となるものが存在するので, その V に対して

$$H_j(\alpha, s, (p,q)) = \frac{\gamma(s)}{j_V(\alpha)^{-s} - 1} Z_j(V; \alpha, s, (p,q)) \tag{2.1}$$

が成り立つ. 従って, H 函数は全平面に有理型に解析接続され, 特に $s = 0$ のまわりで次の形に Laurent 展開される:

$$H_j(\alpha, s, (p,q)) = \frac{h_{j,-1}(\alpha, (p,q))}{s} + h_{j,0}(\alpha, (p,q)) + h_{j,1}(\alpha, (p,q))s + \cdots.$$

そこで ε を F の総正基本単数 > 1 とし,

$$\mathbf{H}_j(\alpha, (p,q)) = \exp\left(\frac{\log \varepsilon}{2\pi i} \left(h_{1-j,0}(\alpha, (-p,-q)) - h_{j,0}(\alpha, (p,q)) \right) \right)$$

とおく. (2.1) から直ちに分かるように

$$\mathbf{H}_j(\alpha, (p,q)) = T_j(V; \alpha, (p,q))^{\log \varepsilon / \log j_V(\alpha)}. \tag{2.2}$$

従って, $\mathbf{H}$ 値は二重三角函数の特殊値で表すことができる. また命題 2.1 と H 函数の簡単な性質から, $V \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\mathbf{H}_j(V\alpha, (p,q)) = \mathbf{H}_j(\alpha, \operatorname{sign} j_V(\alpha)(p,q)V) \tag{2.3}$$

が成り立つ.

次に $\mathbf{H}$ 値を用いて, 実二次体の合同類不変量を二つ構成する. $\mathfrak{d}_F$ を F の共役差積とする. $\mathfrak{C} \in H_F(\mathfrak{f})$ に対して, 整イデアル $\mathfrak{b} \in \mathfrak{C}^{-1}$ を固定し, $\lambda - 1 \in \mathfrak{f}$ なる $\lambda \in \mathfrak{b}$ を一つ選ぶ. まず, $\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2' > 0$, $\alpha_1' > 0$ を満たす $(\mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{d}_F)^{-1}$ の整数底 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ に対して

$$Y_j(\mathfrak{C}) = \mathbf{H}_j(\alpha_2'/\alpha_1', (-\operatorname{tr}(\lambda\alpha_1), \operatorname{tr}(\lambda\alpha_2)))$$

とおく. 但し, $z \in F$ に対して, z' は z の共役数, $\mathrm{tr}(z)$ は z のトレースを表す. 次に, $\beta_2\beta_1' - \beta_1\beta_2' > 0$, $\beta_1 > 0$ を満たす $(\mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{d}_F)^{-1}$ の整数底 $\{\beta_1, \beta_2\}$ に対して

$$Z_j(\mathfrak{C}) = \mathbf{H}_{1-j}(\beta_2/\beta_1, (-\mathrm{tr}(\lambda\beta_1), \mathrm{tr}(\lambda\beta_2)))$$

とおく. このとき, (2.3) によって, $Y_j(\mathfrak{C})$ と $Z_j(\mathfrak{C})$ は $\mathfrak{b}$ や λ, そして整数底の取り方に依らない. 以上より, 類 $\mathfrak{C}$ に関する不変量 $Y_j(\mathfrak{C})$, $Z_j(\mathfrak{C})$ が二重三角函数の積を用いて構成された. これらの不変量を用いて, $X(\mathfrak{C})$ は簡単に記述できる: $f = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > 0,\ \varepsilon^k - 1 \in \mathfrak{f}\}$ とすると

$$X(\mathfrak{C}) = Y_j(\mathfrak{C})^f Z_j(\mathfrak{C})^f. \tag{2.4}$$

証明は割愛するが, $Y_j(\mathfrak{C})$ と $Z_j(\mathfrak{C})$ に関する次の表示を利用する.

命題 2.2. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{C}$ に属する整イデアルとし, $\{\beta, \alpha\}$ を $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ の整数底で, $\alpha\beta' - \beta\alpha' > 0$, β は総正を満たすものとする. このとき, (u, v) を $u\alpha + v\beta = 1$ から定まる有理数の組とすれば,

$$Y_j(\mathfrak{C}) = \mathbf{H}_j(\alpha/\beta, (u, v)), \quad Z_j(\mathfrak{C}) = \mathbf{H}_j(\alpha'/\beta', (u, v))^{-1}.$$

更に, $U\binom{\alpha}{\beta} = \varepsilon\binom{\alpha}{\beta}$ によって $U \in SL_2(\mathbb{Z})$ を定めれば

$$Y_j(\mathfrak{C})^f = T_j(U^f; \alpha/\beta, (u, v)), \quad Z_j(\mathfrak{C})^f = T_j(U^f; \alpha'/\beta', (u, v)).$$

例 2.1. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f} = (4)$ とし, $\mathfrak{C} = (1)$ in $H_F(\mathfrak{f})$ とする. このとき $\varepsilon = (3 + \sqrt{5})/2$, $f = 3$. ここで命題 2.2 において $\mathfrak{a} = (1)$, $\beta = 4$, $\alpha = 4\varepsilon$ とすれば, $(u, v) = (0, 1/4)$, $U = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, そして $U^3 = \left(\begin{smallmatrix} 21 & -8 \\ 8 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. 従って,

$$\begin{aligned} Y_j(\mathfrak{C})^3 &= \mathbf{H}_j(\varepsilon, (0, 1/4))^3 = T_j(U^3; \varepsilon, (0, 1/4)) \\ &= \prod_{k \bmod 8} S_j\left(\frac{5k+2}{8}, -\frac{k}{8}; \varepsilon^3\right). \end{aligned}$$

最後の式で ε を ε' に置き換えれば $Z_j(\mathfrak{C})$ の表示式となるが, 命題 1.1 により, 結局は $Z_j(\mathfrak{C}) = Y_j(\mathfrak{C})$ となることが容易に分かる.

例 2.2. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$, $\mathfrak{f} = ((3 + \sqrt{21})/2)$ とし, $\mathfrak{C} = (1)$ in $H_F(\mathfrak{f})$ とする. このとき $\varepsilon = (5 + \sqrt{21})/2$, $f = 1$. ここで命題 2.2 において $\mathfrak{a} = (1)$, $\beta = 3$, $\alpha = (9 + \sqrt{21})/2$ とすれば, $(u, v) = (0, 1/3)$, $U = \left(\begin{smallmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. 従って,

$$Y_j(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{1}{3}, 0; \varepsilon\right) S_j\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \varepsilon\right) S_j\left(0, \frac{1}{3}; \varepsilon\right). \tag{2.5}$$

またこの場合にも $Z_j(\mathfrak{C}) = Y_j(\mathfrak{C})$ が成り立つ (一般には $Y_j(\mathfrak{C})$ と $Z_j(\mathfrak{C})$ は異なる). 上の表示には命題 2.2 を用いたが, 定義まで遡るとより簡明な表示を得られる. 実際, $\mathfrak{b} = (1)$, $\lambda = 1$, $\alpha_1 = (14 - 3\sqrt{21})/21$, $\alpha_2 = (-21 + 5\sqrt{21})/42$ とすれば

$$Y_j(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \varepsilon\right). \tag{2.6}$$

これら二つの表示から生じる二重三角函数の関係式は, (2.3) を用いて直接証明できる. 従って, 次の注意 2.1 で述べる事実により, 結局は定理 1 の応用の範疇にある (cf. [13]).

注意 2.1. 本節では, 荒川の論文に倣って H 函数を用いて $\mathbf{H}$ 値を導入した. しかし, H 函数を介せず構成することが可能である. 実際,

$$M(\alpha,(p,q)) = \left\{ V \in GL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} V\alpha = \alpha,\ j_V(\alpha) > 0, \\ (p,q)V \equiv (p,q) \bmod \mathbb{Z}^2 \end{array} \right\}$$

とおくと, これは $GL_2(\mathbb{Z})$ の無限巡回部分群となるので, 定理 1 の応用として次が言える: $T_j(V;\alpha,(p,q))^{\log\varepsilon/\log j_V(\alpha)}$ は $V \in M(\alpha,(p,q)) \setminus \{E\}$ の取り方に依らない. 但し E は単位行列である. 従って, この値を $\mathbf{H}_j(\alpha,(p,q))$ とおけばよい. しかもこれは (2.2) と比較して, V の有効範囲が広くなっている. この事実は, 各不変量の表示の幅を広げるものであり重要である. 更に不変量の構成に不可欠な公式 (2.3) も定理 1 の応用として導くことができる.

2.2 新谷の表示

$\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{cf}$ とが同一の F の狭義イデアル類に属するような F の整イデアル $\mathfrak{c}$ を一つ固定する. そして

$$R_0(\mathfrak{C}) = \left\{ z = x\varepsilon + y \in (\mathfrak{cf})^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{Q},\ 0 \le x < 1,\ 0 < y \le 1, \\ (z)\mathfrak{cf} = \mathfrak{C} \text{ in } H_F(\mathfrak{f}) \end{array} \right\}$$

とおき, また右辺の条件「$0 \le x < 1, 0 < y \le 1$」を「$0 < x \le 1, 0 \le y < 1$」に置き換えたものを $R_1(\mathfrak{C})$ とする. このとき

$$X(\mathfrak{C}) = \prod_{z \in R_j(\mathfrak{C})} S_2(z,(\varepsilon,1)) S_2(z',(\varepsilon',1)) \tag{2.7}$$

$(j = 0, 1)$ が成り立つ.

例 2.3. 例 2.1 と同じ設定で, $\mathfrak{c} = (1)$ とすれば

$$X(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{1}{4}, 0; \varepsilon\right)^2 S_j\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \varepsilon\right)^2 S_j\left(0, \frac{1}{4}; \varepsilon\right)^2.$$

従って, 例 2.1 から得られる表示とは見かけ上異なる.

例 2.4. 例 2.2 と同じ設定で, $\mathfrak{c} = ((3+\sqrt{21})/2)$ とすれば

$$X(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{1}{3}, 0; \varepsilon\right)^2 S_j\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \varepsilon\right)^2 S_j\left(0, \frac{1}{3}; \varepsilon\right)^2.$$

この場合は, (2.5) から生じる表示式と同じである.

これらの例から分かるように, 一般には荒川の表示 (2.4) と新谷の表示 (2.7) は異なる. 従って, そこから二重三角函数の非自明な関係式が生じるが, それは定理 1 によって説明できる. 実際, 次の関係式を不変量を経由せずに直接示せる.

命題 2.3.

$$\prod_{z \in R_j(\mathfrak{C})} S_2(z,(\varepsilon,1)) = Y_j(\mathfrak{C})^f, \qquad \prod_{z \in R_j(\mathfrak{C})} S_2(z',(\varepsilon',1)) = Z_j(\mathfrak{C})^f.$$

証明. まず $R_j(\mathfrak{C})$ を具体的に記述する. そのために整イデアル $\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}$ を固定する. このとき, $\mathfrak{c}$ の取り方から, $\mathfrak{c}\mathfrak{f}=(\gamma)\mathfrak{a}$ を満たす F の総正な元 γ が存在する. また, 次を満たす F の元の組 $\{\alpha,\beta\}$ が存在する: $\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}\beta=\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}=(\gamma)\mathfrak{c}^{-1}$, $\alpha\beta'-\alpha'\beta>0$, $\gamma/\beta\in\mathbb{Z}$, $\gamma/\beta>0$. ここで $n=\gamma/\beta$ とおき, 命題 2.2 の様に $(u,v)\in\mathbb{Q}^2$ と $U=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$ を定める. このとき $c>0$ となることに注意せよ. また $(u_i,v_i)=(u,v)U^i$ $(i=0,\dots,f-1)$ とおき, 最後に

$$z_{i,k,l,m}=\left\{\frac{1}{n}\left(l+\frac{ak+au_i+cv_i}{c}\right)\right\}_j\varepsilon+\left\{\frac{1}{n}\left(m-\frac{k+u_i}{c}\right)\right\}_{1-j}$$

$(k=0,\dots,c-1;\ l,m=0,\dots,n-1)$ とすれば, $z_{i,k,l,m}$ 達はそれぞれ異なり, 更に $R_j(\mathfrak{C})$ を完全に構成する.

次に最初の関係式を証明する. まず上で述べた $R_j(\mathfrak{C})$ の具体的表示を適用し, 更に命題 1.1 を応用することで

$$\begin{aligned}\prod_{z\in R_j(\mathfrak{C})}S_2(z,(\varepsilon,1))&=\prod_{i=0}^{f-1}\prod_{k=0}^{c-1}S_j\left(\frac{ak+au_i+cv_i}{c},-\frac{k+u_i}{c};\varepsilon\right)\\&=\prod_{i=0}^{f-1}T_j(U;\alpha/\beta,(u_i,v_i)).\end{aligned}$$

ここで定理 1 を用いれば

$$\prod_{z\in R_j(\mathfrak{C})}S_2(z,(\varepsilon,1))=T_j(U^f;\alpha/\beta,(u,v))=Y_j(\mathfrak{C})^f.$$

故に命題の第一式が成り立つ. 第二式についても同様である. □

2.3 Tangedal と山本の表示

まずマイナス連分数の理論 (cf. [14, §13]) を応用して, $X(\mathfrak{C})$ を分割するような二つの合同類不変量を構成する. 類 $\mathfrak{C}\in H_F(\mathfrak{f})$ に属する整イデアル $\mathfrak{a}$ を一つ固定する. このとき, 総正な $z,\omega\in F$ であって, $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega=(z)\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$, $\omega>1>\omega'>0$ なるものが存在する. この ω をマイナス連分数展開すれば

$$\omega=l_0-\cfrac{1}{l_1-\cdots-\cfrac{1}{l_{r-1}-\cfrac{1}{l_0-\cdots}}}$$

(r は正整数, $l_0,\dots,l_{r-1}$ は 2 以上の整数) の形に一意的に書ける. 以降においては表記の簡単のために, 右辺の形の連分数を $[[\overline{l_0,\dots,l_{r-1}}]]$ の様に表す. ここで数列 $\{l_0,\dots,l_{r-1}\}$ を $l_{i+r}=l_i$ $(i\in\mathbb{Z})$ により $\{l_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ へと拡張し, そして $\omega_i=[[\overline{l_i,\dots,l_{i+r-1}}]]$ $(i\in\mathbb{Z})$ とおく. 更に数列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を $A_0=1$, $A_{i+1}=A_i/\omega_{i+1}$ で定義する. 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して $x_iA_{i-1}+y_iA_i=z$ を満たす有理数の組 (x_i,y_i) がただ一つ定まる. このとき, 集合 $\{(\{x_1\}_j,\{y_1\}_{1-j},\omega_1),\dots,(\{x_{fr}\}_j,\{y_{fr}\}_{1-j},\omega_{fr})\}$ $(j=0,1)$ は, $\mathfrak{a},z,\omega$ の取り方に依らない. そこで, 類 $\mathfrak{C}$ の不変量として

$$X_j^{(1)}(\mathfrak{C})=\prod_{i=1}^{fr}S_j(x_i,y_i;\omega_i),\quad X_j^{(2)}(\mathfrak{C})=\prod_{i=1}^{fr}S_j(x_i,y_i;\omega_i')$$

を導入する. このとき

$$X(\mathfrak{C})=X_j^{(1)}(\mathfrak{C})X_j^{(2)}(\mathfrak{C})\tag{2.8}$$

が成り立つ.

例 2.5. 例 2.1 と同じ場合を考える. 例えば $\mathfrak{a} = (1)$, $z = 4$, $\omega = \varepsilon = [[\overline{3}]]$ とすれば, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \varepsilon$ であるから

$$X_j^{(1)}(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{1}{4}, 0; \varepsilon\right) S_j\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \varepsilon\right) S_j\left(0, \frac{1}{4}; \varepsilon\right).$$

一方, 命題 1.1 により, $X_j^{(2)}(\mathfrak{C})$ も全く同様に表示される.

例 2.6. 例 2.2 と同じ場合を考える. 例えば $\mathfrak{a} = (1)$, $z = 3$, $\omega = (9 + \sqrt{21})/6 = [[\overline{3, 2, 2}]]$ とすれば, $\omega_1 = [[\overline{2, 2, 3}]] = (9 + \sqrt{21})/10$, $\omega_2 = [[\overline{2, 3, 2}]] = (11 + \sqrt{21})/10$, $\omega_3 = \omega$. 従って,

$$X_j^{(1)}(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{1}{3}, 0; \omega_1\right) S_j\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \omega_2\right) S_j\left(0, \frac{1}{3}; \omega_3\right),$$
$$X_j^{(2)}(\mathfrak{C}) = S_j\left(\frac{1}{3}, 0; \omega_1'\right) S_j\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \omega_2'\right) S_j\left(0, \frac{1}{3}; \omega_3'\right).$$

これらの例により, 表示 (2.8) は前述の二つとは異なることが見て取れる. しかし, その相違についても定理 1 によって以下の様に直接説明できる.

命題 2.4. $X_j^{(1)}(\mathfrak{C}) = Y_j(\mathfrak{C})^f$, $X_j^{(2)}(\mathfrak{C}) = Z_j(\mathfrak{C})^f$.

証明. $\alpha = \omega/z$, $\beta = 1/z$ とおくと, 命題 2.2 の (u, v) と U は, $(u, v) = (x_0, y_0)$, $U = P_{l_0}, \ldots, P_{l_{r-1}}$ となる. 但し $l \in \mathbb{Z}$ に対して $P_l = \left(\begin{smallmatrix} l & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とする. 従って

$$Y_j(\mathfrak{C})^f = T_j(P_{l_0} \cdots P_{l_{fr-1}}; \omega_0, (x_0, y_0)).$$

このとき定理 1 を繰り返し応用することができて, その結果,

$$\begin{aligned} Y_j(\mathfrak{C})^f &= \prod_{i=0}^{fr-1} T_j(P_{l_i}; P_{l_{i+1}} \cdots P_{l_{fr-1}} \omega_0, (x_0, y_0) P_{l_0} \cdots P_{l_{i-1}}) \\ &= \prod_{i=0}^{fr-1} T_j(P_{l_i}; \omega_{i+1}, (x_i, y_i)) = \prod_{i=0}^{fr-1} S_j(x_{i+1}, y_{i+1}; \omega_{i+1}) \\ &= X_j^{(1)}(\mathfrak{C}). \end{aligned}$$

よって, 命題の第一式は成り立つ. 第二式についても同様である. □

2.4 新しい表示の一例

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f} = (4)$, $\mathfrak{C} = (1)$ in $H_F(\mathfrak{f})$ とする. この場合の $X(\mathfrak{C})$ については, 例 2.1, 2.3, 2.5 で既に扱ったが, より簡単な表示を得ることができたので, それについて解説する.

命題 2.5. $\varepsilon_0 = (1 + \sqrt{5})/2$ とすると

$$X(\mathfrak{C}) = S_2\left(\frac{1 + 3\varepsilon_0^3}{4}, (1, \varepsilon_0^3)\right)^2. \tag{2.9}$$

証明. まず (2.3) より

$$\mathbf{H}_j(\varepsilon,(0,1/4)) = \mathbf{H}_j\left(\left(\begin{smallmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{smallmatrix}\right)\varepsilon,(0,1/4)\right) = \mathbf{H}_j(\varepsilon,(1/2,1/4))$$

であることに注意すると, 例 2.1 の表示から

$$Y_j(\mathfrak{C})^3 = \mathbf{H}_j(\varepsilon,(0,1/4))^{3/2}\mathbf{H}_j(\varepsilon,(1/2,1/4))^{3/2} = \mathbf{H}_j(\varepsilon/2,(0,1/4))^{3/2}.$$

但し, 二番目の等式の証明においては

$$\mathbf{H}_j\left(\frac{\alpha}{N},(p,q)\right) = \prod_{k \bmod N}\mathbf{H}_j\left(\alpha,\left(\frac{k+p}{N},q\right)\right) \tag{2.10}$$

($N\in\mathbb{Z}$, $N>0$) を用いた. 従って, (2.3) より

$$Y_j(\mathfrak{C})^3 = \mathbf{H}_j\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)(2\varepsilon_0),(0,1/4)\right)^{3/2} = \mathbf{H}_j(2\varepsilon_0,(3/4,0))^{3/2}.$$

よって, $-\left(\begin{smallmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)\in M(2\varepsilon_0,(3/4,0))$ であることから

$$Y_j(\mathfrak{C})^3 = T_j\left(-\left(\begin{smallmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right);2\varepsilon_0,(3/4,0)\right) = S_j(3/4,1/4;\varepsilon_0^3)$$

を得る (cf. 注意 2.1). 例 2.1 で述べたが, 今の場合は $Z_j(\mathfrak{C}) = Y_j(\mathfrak{C})$ であるから, (2.9) が成り立つ. □

注意 2.2. 関係式 (2.10) の証明としては, H 函数の定義に立ち返るのが簡単である. しかし, H 函数を使わずに二重三角函数の性質を応用して証明することもできる.

注意 2.3. 一般には不変量 $X(\mathfrak{C})$ の具体的な値は知られていないが, 上の例においては $X(\mathfrak{C}) = \varepsilon_0-\sqrt{\varepsilon_0}$ となる. これは新谷によって証明された (cf. [9, §3.1], [11, §3.1]). この結果と表示 (2.9) と合わせれば, 二重三角函数の特殊値について非自明な結果を得られる: $\varepsilon_0 = (1+\sqrt{5})/2$ のとき

$$S_2\left(\frac{1+3\varepsilon_0^3}{4},(1,\varepsilon_0^3)\right) = \sqrt{\varepsilon_0-\sqrt{\varepsilon_0}}.$$

また同様にして, 表示 (2.6) に対応する結果として次を得る (cf. [9, §3.3]): $\varepsilon = (5+\sqrt{21})/2$ のとき

$$S_2\left(\frac{1+2\varepsilon}{3},(1,\varepsilon)\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon-1}}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon-1}}}.$$

参考文献

[1] T. Arakawa, Generalized eta-functions and certain ray class invariants of real quadratic fields, Math. Ann. **260** (1982), 475–494.

[2] S. Egami, Reciprocity laws of multiple zeta functions and generalized Dedekind sums, in "Analytic Number Theory and Related Topics", K. Nagasaka (ed.), World Scientific, 1993, 17–27.

[3] N. Kurokawa, Multiple sine functions and Selberg zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **67** (1991), 61–64.

[4] N. Kurokawa, Gamma factors and Plancherel measures, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68** (1992), 256–260.

[5] N. Kurokawa, Multiple zeta functions: an example, Adv. Stud. Pure Math. **21** (1992), 219–226.

[6] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions, Forum Math. **15** (2003), 839–876.

[7] 黒川信重・小山信也, 多重三角関数論講義, 日本評論社, 2010.

[8] J. Lewittes, Analytic continuation of Eisenstein series, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1972), 469–490.

[9] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 167–199.

[10] 新谷卓郎, 代数体の L-函数の特殊値について, 数学 **29** (1977), 204–216.

[11] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 139–167.

[12] B. Tangedal, Continued fractions, special values of the double sine function, and Stark units over real quadratic fields, J. Number Theory **124** (2007), 291–313.

[13] S. Yamamoto, On Kronecker limit formulas for real quadratic fields, J. Number Theory **128** (2008), 426–450.

[14] D. B. ザギヤー, 片山孝次訳, 数論入門, 岩波書店, 1990.